MOMENTLER VE ASİMETRİ ÖLÇÜLERİ(ÇARPIKLIK, BASIKLIK)

Momentler

Gözlem değerlerinin sıfırdan sapmalarının $(X_i - 0)$ veya aritmetik ortalamadan sapmalarının $(X_i - \bar{x})$ kuvvetlerinin aritmetik ortalamasına **moment** adı verilir.

Momentler sıfır etrafındaki momentler (sıfıra göre momentler) ve aritmetik ortalama etrafındaki momentler (aritmetik ortalamaya göre momentler) olmak üzere ikiye ayrılır.

Sapmaların derecesi “ r “ ile gösterilir ve momentin derecesini belirler.

Moment formülleri aşağıdaki gibidir. Genellikle ilk dört moment hesaplanır.

Sıfıra Göre Momentler	Basit Serilerde	$m_r = \frac{\sum X_i^r}{n}$
	Frekans Serilerinde	$m_r = \frac{\sum f_i X_i^r}{n}$
	Gruplanmış Serilerde	$m_r = \frac{\sum f_i m_i^r}{n}$

$r = 1\ için$, $m_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{x}$ dır. Yani sıfıra göre birinci moment, aritmetik ortalamayı verir.

Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler	Basit Serilerde	$\mu_r = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^r}{n}$
	Frekans Serilerinde	$\mu_r = \frac{\sum f_i (X_i - \bar{x})^r}{n}$
	Gruplanmış Serilerde	$\mu_r = \frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^r}{n}$

$r = 1\ için$, $\mu_1 = 0$

$r = 2\ için$, $\mu_2 = \sigma^2$ dir.

Sıfıra göre momentler bilindiğinde, aritmetik ortalamaya göre momentler aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

Örnek. Aşağıdaki basit serinin sıfıra ve aritmetik ortalamaya göre momentlerini bulunuz?

$\boldsymbol{X_i}$	X_i^2	X_i^3	X_i^4	$X_i - \bar{x}$	$(X_i - \bar{x})^2$	$(X_i - \bar{x})^3$	$(X_i - \bar{x})^4$
1	1	1	1	-5	25	-125	625
3	9	27	81	-3	9	-27	81
4	16	64	256	-2	4	-8	16
6	36	216	1296	0	0	0	0
10	100	1000	10000	4	16	64	256
12	144	1728	20736	6	36	216	1296
$\sum$: 36	306	3036	32370	0	90	120	2274

Sıfıra göre momentler:

$m_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{36}{6} = 6$; $m_2 = \frac{306}{6} = 51$; $m_3 = \frac{3036}{6} = 506$: $m_4 = \frac{32370}{6} = 5395$

Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler:

$\mu_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^1}{n} = \frac{0}{6} = 0$; $\mu_2 = \frac{90}{6} = 15 = \sigma^2$; $\mu_3 = \frac{120}{6} = 20$; $\mu_4 = \frac{2274}{6} = 379$

bulunur.

Örnek. Aşağıdaki veri için sıfıra ve aritmetik ortalamaya göre momentlerini bulunuz?

Sınıflar	f_i							
0 – 2	2							
2 – 4	1							
4 – 6	8							
6 – 8	5							

Sıfıra göre momentler:

$m_1 = 5$; $m_2 = 28.5$; $m_3 = 171.5$: $m_4 = 1068$

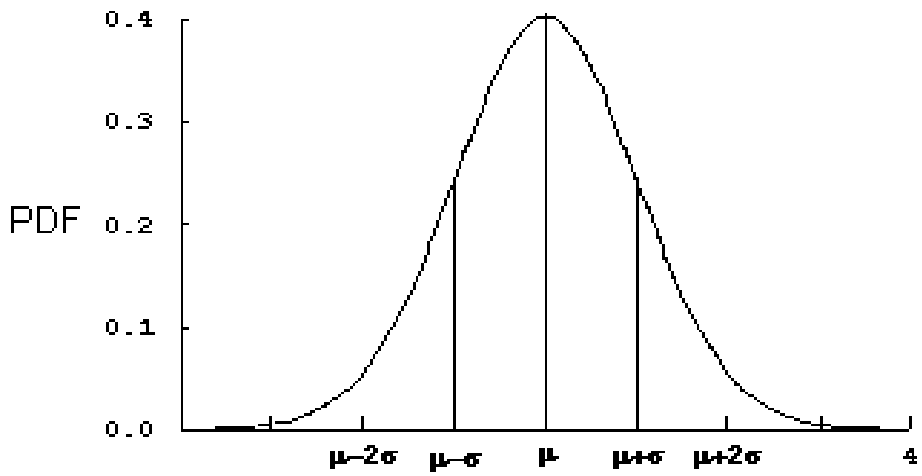
Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler:

$\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 3.5 = \sigma^2$; $\mu_3 = -6$; $\mu_4 = 38$

bulunur.

Çarpıklık (Skewness)

Çarpıklık, bir dağılımın simetrik olmayış veya simetriklikten ayrılma derecesidir. Yani çarpıklık, bir dağılımın ortalaması etrafındaki asimetri derecesini belirtir.



Simetrik yada çan şeklinde eğri

Simetrik ya da çan şeklindeki frekans eğrileri, merkezdeki maksimumdan eşit uzaklıkta yer alan gözlemlerin aynı frekansa sahip olduğunu gösterir. Yani frekansların serinin maksimum noktası etrafında simetrik olarak dağılması seriye simetrik seri adını kazandırır. Normal eğri buna örnektir. Normal eğride serinin tam ortasında maksimuma ulaşan frekanslar, sonra hızla düşmeye başlar.

Çarpıklık katsayısı,

$$Ç.K. = \gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

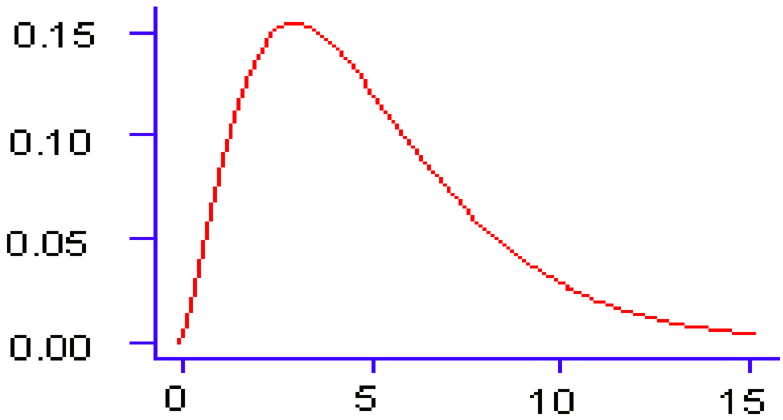
formülü ile hesaplanır.

$$\gamma_3 = 0 \ \ ise \ \ dağılış\ simetrik$$

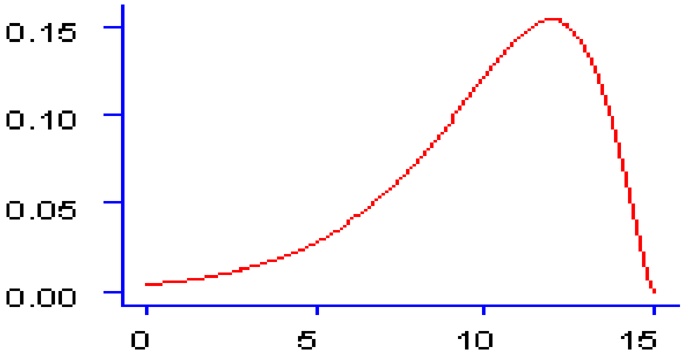
$$\gamma_3 > 0 \ \ ise\ dağılış\ sağa\ çarpık$$

$$\gamma_3 < 0 \ \ ise\ dağılış\ sola\ çarpık$$

kabul edilir.



Sağa çarpık eğri ($\gamma_3 > 0$)



Sola çarpık eğri ($\gamma_3 < 0$)

Örnek. Hesaplanmış bazı değerleri,

$$\mu_1 = 0 \quad ; \quad \mu_2 = 3.5 \quad ; \quad \mu_3 = -6 \quad ; \quad \mu_4 = 38$$

olan serinin çarpıklık katsayısını bulup yorumlayınız.

$$Ç.K. = \gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-6}{3.5\sqrt{3.5}} = \frac{-6}{6{,}547} = -0.91$$

$\gamma_3 < 0$ olduğundan, verilerin dağılışı sola çarpıktır denilebilir.

Basıklık (Kurtosis)

Basıklık bir dağılımın sivrilik derecesidir ve genellikle normal dağılıma göre ele alınır. Normal dağılım, simetrik dağılımın özel bir halidir. Bir dağılımın normal olabilmesi için hem simetrik olması ($\gamma_3 = 0$) hem de normal bir yüksekliğe sahip olması gerekir.

Basıklık katsayısı,

$$B.K. = \gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

formülü ile hesaplanır.

$$\gamma_4 = 0 \;\; ise \;\; dağılış \; normaldir$$

$$\gamma_4 > 0 \;\; ise \; dağılış \; sivri(dik)dir$$

$$\gamma_4 < 0 \;\; ise \; dağılış \; basıktır$$

kabul edilir.

Not: Bir veri topluluğunun normal dağılıma sahip olup olmadığını, çarpıklık ve basıklık katsayılarına bakarak söyleyebiliriz.

$\gamma_3 = \gamma_4 = 0$ ise veriler normal dağılıma sahiptir denir.

Örnek. Hesaplanmış bazı değerleri,

$$\mu_1 = 0 \;\; ; \;\; \mu_2 = 3.5 \;\; ; \;\; \mu_3 = -6 \;\; ; \;\; \mu_4 = 38$$

olan serinin basıklık katsayısını bulup yorumlayınız.

$$B.K. = \gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{38}{(3.5)(3.5)} - 3 = \frac{38}{12.25} - 3 = 0.102$$

$\gamma_4 > 0$ olduğundan verilerin dağılışı sivridir.

GEÇMİŞ KONULARLA İLGİLİ UYGULAMALAR